JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 71, 246–262 (1987)

# Le comportement du mouvement brownien entre les deux instants où il passe par un point double

JEAN-FRANÇOIS LE GALL

*Université Paris 6, Lab. de Probabilités, Tour 56, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

*Communicated by the Editors*

A precise meaning is given to the following intuitive statement: between the two times when it hits a double point, a Brownian motion behaves like a Brownian bridge. The main tool is the notion of intersection local time, which provides a measure on the set of double points, and hence a notion of properties of almost all double points. Results are applied to study points of infinite multiplicity of plane Brownian paths. © 1987 Academic Press, Inc.

## 1. INTRODUCTION

Soit $W = (W(t);\ t \geqslant 0)$ un mouvement brownien plan. Il est bien connu [3] que la trajectoire de $W$ possède preque sûrement une infinité de points doubles. L'idée de départ du présent travail est de donner un sens mathématique précis à l'affirmation intuitive suivante: entre les deux instants auxquels il passe par un point double, $W$ se comporte comme un lacet brownien. Rappelons qu'on appelle lacet brownien de longueur $t$ le processus défini sur l'intervalle de temps $[0; t]$, obtenu en conditionnant un mouvement brownien issu de 0 à revenir en 0 à l'instant $t$. Une première idée pour rendre rigoureuse l'affirmation ci-dessus consiste à choisir un point double et à étudier la loi de la trajectoire entre les deux instants auxquels le processus passe par ce point double. Montrons sur un exemple à quelles difficultés conduit cette approche. Une façon naturelle de construire un point double consiste à introduire le temps $T$ défini comme le premier instant après 2 où $W$ rencontre sa trajectoire sur l'intervalle $[0; 1]$. Si $S$ est défini comme le premier instant où $W$ prend la valeur $W(T)$, on peut chercher à étudier la loi de la trajectoire de $W$ sur l'intervalle $[S; T]$. On s'aperçoit vite que cette loi est très différente de celle d'un lacet brownien. Il suffit en effet de remarquer que, juste avant l'instant $T$, le processus $W$ ne peut pas tourner autour du point $W(T)$, comme devrait le faire un lacet brownien.



0022-1236/87 $3.00

On peut expliquer ce phénomène en disant que le point double $W(S) = W(T)$ que nous avons construit est "exceptionnel": il n'existe qu'une famille dénombrable de points doubles de ce type, alors que l'ensemble des points doubles a pour dimension de Hausdorff deux (Taylor [10]). De façon générale l'étude de la partie de trajectoire entre les deux instants auxquels $W$ passe par un point double donné pose de sérieuses difficultés liées à la remarque suivante: si $(S, T)$ est un couple de temps aléatoires tel que $S < T$ et $W(S) = W(T)$, $T$ peut être un temps d'arrêt, c'est le cas dans l'exemple ci-dessus, mais $S$ n'en est certainement pas un (sinon la propriété de Markov montrerait que $W$ ne revient pas en $W(S)$). Les remarques précédentes suggèrent qu'au lieu d'étudier un point double fixé, il pourrait être avantageux de considérer simultanément tous les points doubles de la trajectoire. On est alors amené à utiliser une mesure portée par les points doubles, ou plus précisément par les couples $(u, v)$ tels que $u < v$ et $W(u) = W(v)$, qui nous est fournie par la notion de temps local d'intersection (Geman, Horowitz, et Rosen [5], Rosen [9]).

Décrivons brièvement nos résultats. Soit $C_1$ l'espace des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}^2$, muni de la topologie de la convergence uniforme et de la tribu borélienne associée. On pose

$$\mathscr{C} = \{(u, v); 0 \leqslant u < v \leqslant 1\}.$$

Pour tout couple $(u, v) \in \mathscr{C}$, soit ${}_uW_v$ la portion de trajectoire entre les instants $u$ et $v$, i.e. l'élément de $C_1$ défini par:

$${}_uW_v(t) = \begin{cases} W(u+t) - W(u) & \text{si } \ 0 \leqslant t \leqslant v-u, \\ W(v) - W(u) & \text{si } \ t > v-u. \end{cases}$$

Soit $l_2$ la mesure sur $\mathscr{C}$ associée au temps local d'intersection de $W$ avec lui-même. La mesure $l_2$ est portée par les couples $(u, v)$ tels que $W(u) = W(v)$ et définie formellement par:

$$l_2(du\, dv) = \delta_{(0)}(W(u) - W(v))\, du\, dv.$$

Alors, pour toute fonction $\Phi$ borélienne positive sur $C_1$,

$$E\left[\int_{\mathscr{C}} \Phi({}_uW_v)\, l_2(du\, dv)\right] = \int_{\mathscr{C}} \frac{du\, dv}{2\pi(v-u)} E[\Phi(L^{(v-u)})] \tag{1}$$

où, pour $a > 0$, $L^{(a)}$ désigne un lacet brownien de longueur $a$, avec la convention que $L^{(a)}(t) = 0$ pour $a < t \leqslant 1$.

La formule (1) fournit une réponse assez satisfaisante à notre problème de départ. S'il n'est pas exact que, pour un point double donné, la trajectoire de $W$ entre les deux instants auxquels il passe par ce point double soit un lacet brownien, une version "intégrée sur tous les points doubles" de ce résultat est vraie. Une conséquence importante de la formule (1) est que toute propriété vérifiée presque sûrement par les lacets browniens le sera aussi par ${}_uW_v$, pour $l_2$-presque tout couple $(u, v)$.

La partie 2 est consacrée à la preuve d'une forme générale de l'identité (1) qui s'applique aussi aux points de multiplicité $p$ du mouvement brownien plan et aux points doubles du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Dans la partie 3 nous utilisons la formule (1) pour donner une autre réponse à notre question initiale, cette fois en termes de propriétés presque sûres de la trajectoire. Pour $(u, v) \in \mathscr{C}$ soit ${}_uW_v^*$ l'élément de $C_1$ défini par

$$ {}_uW_v^*(t) = (v-u)^{-1/2}(W(u+(v-u)t) - W(u)). $$

Pour tout $\varepsilon > 0$ soit $\mathscr{C}_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathscr{C};\ v - u > \varepsilon\}$. Alors, pour toute fonction $\Phi$ borélienne bornée sur $C_1$,

$$ \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \int_{\mathscr{C}_\varepsilon} \Phi({}_uW_v^*)\, l_2(du\, dv) = (2\pi)^{-1} E[\Phi(L^{(1)})] $$

avec convergence presque sûre. On peut donc, sur chaque trajectoire, reconstruire la loi du lacet brownien en étudiant le comportement du processus entre les instants auxquels il passe par un point double.

Les parties 4 et 5 sont consacrées à l'étude des points de multiplicité infinie du mouvement brownien plan. Dvoretzky, Erdös et Kakutani [4] ont montré que la trajectoire de $W$ possède presque sûrement des points de multiplicité $\mathfrak{c}$, où $\mathfrak{c}$ désigne la puissance du continu. Il nous a cependant été difficile de suivre les arguments de [4], en particulier il semble que les auteurs de [4] appliquent la propriété de Markov à des temps $t_n(j)$ qui ne sont pas des temps d'arrêt (voir [4, p. 179]). Dans la partie 4 nous montrons comment les résultats de la partie 2 permettent de simplifier les arguments de [4] et d'aboutir à une preuve semble-t-il satisfaisante de l'existence de points de multiplicité $\mathfrak{c}$. Dans la partie 5 nous établissons le résultat plus précis suivant. Pour toute partie $K$ compacte totalement discontinue de $[0; \infty[$ il existe presque sûrement un point $z$ du plan tel que $W^{-1}(z)$ ait même structure d'ordre que $K$, au sens où l'on passe de $K$ à $W^{-1}(z)$ par un homéomorphisme croissant. Une conséquence de ce résultat est que la trajectoire de $W$ possède presque sûrement des points de multiplicité exactement dénombrable. Les résultats de la partie 5 contiennent évidemment comme cas particulier le théorème de Dvoretzky, Erdös et Kakutani. Cependant nous avons préféré traiter séparément ce dernier résultat, d'abord en raison de son importance historique et ensuite parce que les arguments essentiels sont déjà présents dans l'étude de ce cas particulier. Signalons pour conclure que des résultats voisins de ceux de la partie 5 ont été obtenus par Adelman [1] à l'aide de méthodes complètement différentes.

## 2. Formules principales

Nous nous proposons dans cette partie d'établir une forme générale de l'identité (1) de l'introduction. Nous commençons par quelques rappels sur la notion de temps local d'intersection. $W$ désigne un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ pour $d=2$ ou 3. Si $\mathscr{C}$ est défini comme dans l'introduction, on appelle temps local d'intersection de $W$ avec lui-même, sur l'intervalle $[0, 1]$, la famille $(\alpha(x, \cdot), x \in \mathbb{R}^d)$ de mesures de Radon positives sur $\mathscr{C}$ qui satisfait $P$ p.s. les deux propriétés suivantes:

(i) l'application $x \to \alpha(x, \cdot)$ est continue au sens de la topologie de la convergence vague,

(ii) pour toute partie borélienne $B$ de $\mathscr{C}$ et pour toute fonction $f$ borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$,

$$\int_B f(W(v) - W(u))\, du\, dv = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \alpha(x, B)\, dx.$$

Nous renvoyons à [5] et [9] pour une preuve de l'existence du temps local d'intersection. La propriété (ii) entraîne que la mesure $\alpha(x, \cdot)$ est portée par les couples $(u, v)$ tels que $W(v) - W(u) = x$. On note simplement $l_2(\cdot) = \alpha(0, \cdot)$. Il est important de remarquer que la mesure $l_2$ est p.s. de masse totale infinie (voir [9] ou [8]) alors que pour $x \neq 0$ les mesures $\alpha(x, \cdot)$ sont finies.

Théorème 2.1. *Soient $\Phi$ une fonction borélienne positive sur $(C_1)^3$ et $B$ une partie borélienne de $\mathscr{C}$. Alors*:

$$E\left[\int_B \Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)\, l_2(du\, dv)\right]$$
$$= (2\pi)^{-d/2} \int_B \frac{du\, dv}{(v-u)^{d/2}}\, E[\Phi(U_1^u, L^{(v-u)}, U_2^{1-v})]$$

*où $L^{(v-u)}$ est un lacet brownien en dimension $d$ de longueur $v-u$, $U_1$, $U_2$ sont deux mouvements browniens à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ issus de* 0, *indépendants et indépendants de $L^{(v-u)}$, enfin la notation $U^u$ désigne le processus $U$ arrêté au temps $u$*:

$$U^u(t) = \begin{cases} U(t) & si \quad t \leqslant u \\ U(u) & si \quad u \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

*Preuve* Il suffit de traiter le cas où $\Phi$ est continue bornée et $B$ est un rectangle de côtés parallèles aux axes, contenu dans $\mathscr{C}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, soit $\alpha_B(a\ \cdot)$ la restriction de $\alpha(a, \cdot)$ à $B$. L'application $a \to \alpha_B(a, \cdot)$ est alors étroitement continue [5]. Soient $C_d$ le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, $D(0, \varepsilon)$ la boule de centre 0 de rayon $\varepsilon$. On pose:

$$l_2^\varepsilon(\cdot) = (C_d \varepsilon^d)^{-1} \int_{D(0,\varepsilon)} \alpha(a, \cdot)\, da.$$

Alors,

$$E\left[\int_B \Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)\, l_2^\varepsilon(du\, dv)\right]$$

$$= (C_d\varepsilon^d)^{-1} E\left[\int_B \Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)\, 1_{(|W(v) - W(u)| < \varepsilon)}\, du\, dv\right]$$

$$= (C_d\varepsilon^d)^{-1} \int_B du\, dv$$

$$\times E[1_{(|W(v) - W(u)| < \varepsilon)} E[\Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)/|W(v) - W(u)| < \varepsilon]].$$

L'application qui à $x \in \mathbb{R}^d$ associe la loi du pont brownien commençant en 0 et se terminant en $x$ est continue. En utilisant cette remarque, la propriété d'indépendance des accroissements browniens et la continuité de $\Phi$, on obtient que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (C_d\varepsilon^d)^{-1} E[1_{(|W(v) - W(u)| < \varepsilon)} E[\Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)/|W(v) - W(u)| < \varepsilon]]$$

$$= (2\pi(v-u))^{-d/2} E[\Phi(U_1^u, L^{(v-u)}, U_2^{1-v})],$$

avec les notations du théorème. On trouve finalement:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\int_B \Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)\, l_2^\varepsilon(du\, dv)\right]$$

$$= \int_B (2\pi(v-u))^{-d/2} E[\Phi(U_1^u, L^{(v-u)}, U_2^{1-v})]\, du\, dv.$$

D'autre part, l'application qui à $(u, v)$ associe $\Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)$ est p.s. continue sur $\mathscr{C}$. La continuité étroite de $a \to \alpha_B(a, \cdot)$ entraîne alors:

$P$ p.s., $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_B \Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)\, l_2^\varepsilon(du\, dv)$$

$$= \int_B \Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)\, l_2(du\, dv),$$

d'où, en notant que la famille $(\alpha(a, B), a \in \mathbb{R}^d)$ est uniformément intégrable,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\int \Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)\, l_2^\varepsilon(du\, dv)\right]$$
$$= E\left[\int_B \Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)\, l_2(du\, dv)\right] \quad \blacksquare$$

*Remarque.* Dans le cas où $\Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1) = \Phi({}_uW_v)$, la formule du théorème 2.1 rappelle les "formules clés" de la théorie des excursions du mouvement brownien linéaire (pour de nombreuses applications, voir par exemple Ikeda–Watanabe [6, Chap. III, Sect. 4.3]). Le temps local d'intersection joue le rôle du temps local usuel du mouvement brownien linéaire, cependant que la mesure d'excursion est ici la loi du lacet brownien. Signalons pourtant deux différences importantes. Tout d'abord, notre "mesure d'excursion" n'est autre que la loi du mouvement brownien conditionné à revenir à son point de départ au bout d'un certain temps fixé, ce qui n'est pas du tout le cas pour la mesure d'Ito des excursions. Ensuite on peut dire, en un sens à préciser, que les différentes excursions partant de 0 du mouvement brownien linéaire sont indépendantes, ce qui conduit à des formules exponentielles. Cette propriété ne subsiste pas dans notre situation: si $(u, v)$ et $(u', v')$ sont deux couples de $\mathscr{C}$ tels que $W(u) = W(v)$ et $W(u') = W(v')$ les intervalles $[u; v]$ et $[u'; v']$ peuvent se chevaucher, ce qui interdit toute propriété d'indépendance entre les "excursions" ${}_uW_v$ et ${}_{u'}W_{v'}$.

Il est possible de calculer le moment d'ordre deux de:

$$\int_B \Phi({}_0W_u, {}_uW_v, {}_vW_1)\, l_2(du\, dv),$$

mais l'expression obtenue est assez compliquée en raison du défaut d'indépendance mentionné ci-dessus. En considérant le cas particulier $\Phi = 1$, $B = [0; \frac{1}{2}[ \times ]\frac{1}{2}; 1]$ on voit que le résultat "en moyenne" du théorème 2.1 est non-améliorable, au sens où l'écart type correspondant est strictement positif.

A partir de maintenant nous supposons $d = 2$. Soit $p$ un entier supérieur ou égal à 2. Dvoretzky, Erdös et Kakutani [3] ont montré que la trajectoire de $W$ possède p.s. des points de multiplicité (au moins) $p$. Il découle des résultats de Geman, Horowitz et Rosen [5] que l'on peut définir une notion de temps local d'intersection d'ordre $p$, qui sera pour nous une famille $(\alpha(y, \cdot), y \in (\mathbb{R}^2)^{p-1})$ de mesures de Radon positives sur

$$\mathscr{C}_{(p)} = \{(u_1, ..., u_p); 0 \leqslant u_1 < u_2 < \cdots < u_p \leqslant 1\},$$

caractérisée par les deux propriétés suivantes:

(i) l'application $y \to \alpha(y, \cdot)$ est continue au sens de la topologie de la convergence vague,

(ii) pour toute partie borélienne $B$ de $\mathscr{C}_{(p)}$ et toute fonction $f$ borélienne positive sur $(\mathbb{R}^2)^{p-1}$,

$$\int_B f(W(u_2) - W(u_1), ..., W(u_p) - W(u_{p-1}))\, du_1 \cdots du_p$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^2)^{p-1}} f(y)\, \alpha(y, B)\, dy.$$

On note $l_p(\cdot) = \alpha(0, \cdot)$. La mesure $l_p$ est portée par les $p$-uplets $(u_1, ..., u_p)$ tels que $W(u_1) = \cdots = W(u_p)$. Le théorème suivant généralise, dans le cas $d = 2$, le théorème 2.1 et se démontre exactement de la même façon.

THÉORÈME 2.2. *Soient $\Phi$ une fonction borélienne positive sur $(C_1)^{p+1}$ et $B$ une partie borélienne de $\mathscr{C}_{(p)}$. Alors:*

$$E\left[\int_B \phi({}_0W_{u_1}, {}_{u_1}W_{u_2}, ..., {}_{u_{p-1}}W_{u_p}, {}_{u_p}W_1)\, l_p(du_1 \cdots du_p)\right]$$

$$= (2\pi)^{-(p-1)} \int_B \frac{du_1 \cdots du_p}{(u_2 - u_1) \cdots (u_p - u_{p-1})}$$

$$\times E[\Phi(U_1^{u_1}, L_1^{(u_2-u_1)}, ..., L_{p-1}^{(u_p-u_{p-1})}, U_2^{1-u_p})]$$

*où $L_1^{(u_2-u_1)}, ..., L_{p-1}^{(u_p-u_{p-1})}$ sont $p-1$ lacets browniens plans indépendants de longueurs respectives $u_2 - u_1, ..., u_p - u_{p-1}$, et $U_1$, $U_2$ sont deux mouvements browniens plans issus de 0, indépendants et indépendants des $L_i^{(u_{i+1}-u_i)}$.*

COROLLAIRE 2.3. *Soit $\Gamma$ une partie borélienne de $(C_1)^{p+1}$ telle que, avec les notations du théorème 2.2, pour presque tout p-uplet $(u_1, ..., u_p)$,*

$$P \text{ p.s.,} \qquad (U_1^{u_1}, L_1^{(u_2-u_1)}, ..., L_{p-1}^{(u_p-u_{p-1})}, U_2^{1-u_p}) \in \Gamma.$$

*Alors,*

$$P \text{ p.s.,} \qquad l_p(du_1 \cdots du_p) \text{ p.s.,}\ ({}_0W_{u_1}, {}_{u_1}W_{u_2}, ..., {}_{u_p}W_1) \in \Gamma.$$

*Preuve.* On applique le théorème 2.2 à $\Phi = 1_{\Gamma}$. ▮

*Remarque.* Posons, pour $\phi \in C_1$,

$$\zeta(\phi) = \sup\{s \leq 1;\ \phi(s) \neq 0\},$$

$$\Delta = \{\phi \in C_1;\ \phi(t) \neq 0 \text{ pour tout } 0 < t < \zeta(\phi)\}.$$

Alors $\Gamma = \Delta^{p+1}$ satisfait l'hypothèse du corollaire. On a donc:

$$P \text{ p.s.}, \qquad l_p(du_1 \cdots du_p) \text{ p.s.}, ({}_0W_{u_1}, {}_{u_1}W_{u_2}, \ldots, {}_{u_p}W_1) \in \Gamma,$$

ce qui équivaut encore à:

$$P \text{ p.s.}, l_p(du_1 \cdots du_p) \text{ p.s.}, \operatorname{Card}(\{s \in [0; 1], W(s) = W(u_1)\}) = p.$$

Soit $\gamma_p$ l'image de la mesure $l_p$ par l'application $(u_1, \ldots, u_p) \to W(u_1)$. La mesure $\gamma_p$ est, en un certain sens [7], la mesure canonique portée par les points de multiplicité $p$ de la trajectoire. L'assertion ci-dessus signifie que $\gamma_p$-presque tout point multiple d'ordre $p$ n'est pas multiple d'ordre $p+1$. Ce résultat peut aussi être obtenu en comparant les mesures $\gamma_p$ à la restriction aux points multiples de certaines mesures de Hausdorff [7]. Remarquons qu'il n'est pas immédiat de construire explicitement ne serait-ce qu'un point multiple d'ordre $p$ qui ne soit pas d'ordre $p+1$ (voir [2]).

## 3. Un théorème trajectoriel

Nous considérons à nouveau un mouvement brownien $W$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ pour $d=2$ ou 3. On reprend les notations de l'introduction, en particulier, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathscr{C}_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathscr{C}; v - u > \varepsilon\}$$

et, pour $(u, v) \in \mathscr{C}$, ${}_uW_v^*$ est l'élément de $C_1$ défini par:

$${}_uW_v^*(t) = (v-u)^{-1/2}(W(u + (v-u)t) - W(u)).$$

Théorème 3.1. *Soit $\Phi$ une fonction borélienne bornée sur $C_1$. Alors,*

$$si\ d=2, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \int_{\mathscr{C}_\varepsilon} l_2(du\, dv)\, \Phi({}_uW_v^*) = (2\pi)^{-1} E[\Phi(L)],$$

$$si\ d=3, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1/2} \int_{\mathscr{C}_\varepsilon} l_2(du\, dv)\, \Phi({}_uW_v^*) = 2(2\pi)^{-3/2} E[\Phi(L)],$$

*où dans les deux cas la convergence a lieu p.s. et L désigne un lacet brownien de longueur* 1.

*Preuve.* Nous traitons seulement le cas $d=2$. Le théorème 2.1 entraîne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E\left[\int_{\mathscr{C}_\varepsilon} l_2(du\, dv)\, \Phi({}_uW_v^*)\right] = E[l_2(\mathscr{C}_\varepsilon)]\, E[\Phi(L)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\log \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \varepsilon\right) E[\Phi(L)].$$

Pour étudier la variance de $\int l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)$ nous aurons besoin de quelques notations supplémentaires. On pose pour $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$:

$$A_k^n = [(2k-2)2^{-n};(2k-1)\,2^{-n}[\times](2k-1)2^{-n};2k2^{-n}].$$

Remarquons que les $A_k^n$ sont disjoints et que

$$\mathscr{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} A_k^n.$$

Un changement d'échelle montre que:

$$\int_{A_k^n} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*) \overset{(d)}{=} 2^{-(n-1)} \int_{A_1^1} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*),$$

d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(\int_{A_k^n} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)\right) &= 2^{-2(n-1)}\operatorname{var}\left(\int_{A_1^1} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)\right)\\ &\leqslant 2^{-2(n-1)}M^2E[(l_2(A_1^1))^2],\end{aligned}$$

où $M$ est une constante majorant $|\Phi|$. Grâce à la propriété d'indépendance des accroissements du mouvement brownien on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{A_k^n} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)\right) &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \operatorname{var}\left(\int_{A_k^n} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)\right)\\ &\leqslant 2^{-(n-1)}M^2E[(l_2(A_1^1))^2].\end{aligned}$$

Soit maintenant $B^n = \bigcup_{p=1}^n \bigcup_{k=1}^{2^{p-1}} A_k^p$. On trouve:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(\int_{B^n} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)\right) &\leqslant \left(\sum_{p=1}^n \left(\operatorname{var}\left(\sum_{k=1}^{2^{p-1}} \int_{A_k^p} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)\right)\right)^{1/2}\right)^2\\ &\leqslant \left(\sum_{p=1}^n 2^{-(p-1)/2}\right)^2 M^2E[(l_2(A_1^1))^2]\\ &\leqslant C\end{aligned}$$

pour une certaine constante $C$ indépendante de $n$. Soit $A$ une partie borélienne de $\mathscr{C}$, contenue dans l'un des $B^n$. On peut reprendre tous les calculs précédents en remplaçant partout $A_k^n$ par $A_k^n \cap A$, et on trouve, avec la même constante $C$,

$$\operatorname{var}\left(\int_A l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)\right) \leqslant C.$$

En particulier on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\operatorname{var}\left(\int_{\mathscr{C}_\varepsilon} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)\right) \leqslant C.$$

Soient $X(\varepsilon) = (\log 1/\varepsilon)^{-1} \int_{\mathscr{C}_\varepsilon} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)$ et, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\varepsilon_p = \exp(-p^2)$. Alors:

$$\sum_{p=1}^{\infty} E[(X(\varepsilon_p) - E[X(\varepsilon_p)])^2]^{1/2} \leqslant C^{1/2} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2} < \infty,$$

ce qui montre que la suite $X(\varepsilon_p) - E[X(\varepsilon_p)]$ converge p.s. vers 0. Or d'après le début de la preuve on a aussi:

$$\lim_{p \to \infty} E[X(\varepsilon_p)] = (2\pi)^{-1} E[\Phi(L)],$$

d'où:

$$\lim_{p \to \infty} X(\varepsilon_p) = (2\pi)^{-1} E[\Phi(L)], \qquad \text{p.s.}$$

Pour conclure on remarque d'abord qu'on peut toujours se ramener au cas où $\Phi$ est positive et on utilise le fait que

$$\lim_{p \to \infty} (\log(1/\varepsilon_p)/\log(1/\varepsilon_{p+1})) = 1. \quad \blacksquare$$

*Remarque.* En reprenant les arguments de la preuve ci-dessus on obtient aisément, dans le cas $d = 2$, le résultat plus précis suivant. Soit, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$Y(\varepsilon) = \int_{\mathscr{C}_\varepsilon} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*) - E\left[\int_{\mathscr{C}_\varepsilon} l_2(du\,dv)\,\Phi({}_uW_v^*)\right].$$

Alors la famille $(Y(\varepsilon))$ converge dans $L^2(P)$ quand $\varepsilon$ tend vers 0. En prenant $\Phi = 1$ on voit en particulier que la famille $(l_2(\mathscr{C}_\varepsilon) - E[l_2(\mathscr{C}_\varepsilon)])$ converge dans $L^2(P)$ quand $\varepsilon$ tend vers 0. Si $\gamma$ désigne la limite ainsi obtenue on a aussi, pour toute suite $(g_k)$ de fonctions boréliennes bornées sur le plan convergeant étroitement vers $\delta_{(0)}$,

$$\lim_{k \to \infty} \left(\int_{\mathscr{C}} g_k(W(v) - W(u))\,du\,dv - E\left[\int_{\mathscr{C}} g_k(W(v) - W(u))\,du\,dv\right]\right) = \gamma.$$

Ce dernier résultat a été obtenu, sous une forme un peu différente, par Varadhan [11] (voir aussi [8]) et est connu sous le nom de renormalisation de Varadhan. Signalons pour conclure que les résultats ci-dessus ne subsistent pas en dimension trois. En effet Yor [12] a montré que, si $d=3$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2} (l_2(\mathscr{C}_\varepsilon) - E[l_2(\mathscr{C}_\varepsilon)]) = \frac{1}{2^{1/2}\pi} N,$$

où la convergence a lieu en distribution et $N$ désigne une variable normale centrée réduite.

## 4. L'EXISTENCE DE POINTS DE MULTIPLICITÉ $\mathfrak{c}$

Dans cette partie et la suivante $W$ désigne un mouvement brownien plan. Nous nous proposons de montrer que la trajectoire de $W$ possède presque sûrement des points de multiplicité $\mathfrak{c}$, où $\mathfrak{c}$ désigne la puissance du continu. Notre méthode est très proche de celle de Dvoretzky, Erdös et Kakutani [4], mais nous utiliserons les résultats de la partie 2, et plus particulièrement le corollaire 2.3, pour justifier les points délicats. Commençons par décrire brièvement notre construction.

L'idée générale est de construire, d'une manière convenable, une famille de temps $(a_n(k);\, n \geqslant 0,\, 1 \leqslant k \leqslant 2^n)$ de façon que, pour chaque $n$, $W$ prenne la même valeur, notée $z_n$, en tous les points $a_n(k)$ $(1 \leqslant k \leqslant 2^n)$. On choisit par exemple $a_0(1) = \frac{1}{2}$, puis pour $(a_1(1), a_1(2))$ un couple tel que $0 < a_1(1) < \frac{1}{2} < a_1(2) < 1$ et $W(a_1(1)) = W(a_1(2)) = z_1$. Ici commencent les difficultés. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \tfrac{1}{3} \inf(a_1(1), a_1(2) - a_1(1), 1 - a_1(2))$$

puis posons, pour tout $t \in [0, \varepsilon]$,

$$X_1(t) = W(a_1(1) - t) - z_1,$$
$$X_2(t) = W(a_1(1) + t) - z_1,$$
$$X_3(t) = W(a_1(2) - t) - z_1,$$
$$X_4(t) = W(a_1(2) + t) - z_1.$$

Imaginons un instant qu'on puisse dire que la loi des quatre processus $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ est équivalente à la loi de quatre mouvements browniens indépendants issus de 0, sur l'intervalle de temps $[0; \varepsilon]$ (remarquons que cette phrase n'a aucun sens tant qu'on n'a pas précisé le choix de $a_1(1)$ et $a_1(2)$). On en déduit alors qu'il existe un point commun autre que 0 aux trajectoires de $X_1, X_2, X_3, X_4$, d'où aussi l'existence de quatre temps $a_2(1), \ldots, a_2(4)$ tels que

$$0 < a_2(1) < a_1(1) < a_2(2) < a_2(3) < a_1(2) < a_2(4) < 1$$

et

$$W(a_2(1)) = \cdots = W(a_2(4)) = z_2.$$

On peut répéter la construction, en faisant intervenir cette fois huit processus $X'_1, \ldots, X'_8$, et obtenir ainsi un point $z_3$ multiple d'ordre 8, et ainsi de suite. Si à chaque étape le choix de $\varepsilon$ est fait de manière convenable, on vérifie aisément que $z = \lim z_n$ est un point de multiplicité $\mathfrak{c}$.

Le seul point criticable de l'esquisse de démonstration donnée ci-dessus est l'assertion "la loi de $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ est équivalente à la loi de quatre mouvements browniens indépendants". Plutôt que de chercher à justifier rigoureusement cette assertion, qui peut être en défaut à la suite d'un mauvais choix du couple $(a_1(1), a_1(2))$, nous montrerons comment s'en passer à l'aide du corollaire 2.3.

On reprend les notations de la fin de la partie 2. Pour tout $n \geqslant 2$ le temps local d'intersection à l'ordre $n$ de $W$ avec lui-même définit une mesure $l_n(\cdot)$ sur $\mathscr{C}_{(n)}$. Pour tout $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathscr{C}_{(n)}$ et tout $\varepsilon > 0$ on note

$$\Delta_\varepsilon(s_1, \ldots, s_n) = \{(t_1, \ldots, t_{2n}) \in \mathscr{C}_{(2n)};\ s_i - \varepsilon < t_{2i-1} < s_i < t_{2i} < s_i + \varepsilon \quad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

LEMME 4.1. *Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $\varepsilon > 0$, $P$ p.s.*

$$l_n(\{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathscr{C}_{(n)};\ l_{2n}(\Delta_\varepsilon(s_1, \ldots, s_n)) = 0\}) = 0.$$

*Preuve.* Il existe une fonction borélienne $F$ sur $C_1^{n+1}$ telle que $P$ p.s., pour tout $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathscr{C}_{(n)}$,

$$l_{2n}(\Delta_\varepsilon(s_1, \ldots, s_n)) = F({}_0W_{s_1}, {}_{s_1}W_{s_2}, \ldots, {}_{s_n}W_1).$$

Posons alors:

$$\Gamma = \{(\phi_1, \ldots, \phi_{n+1}) \in (C_1)^{n+1};\ F(\phi_1, \ldots, \phi_{n+1}) > 0\}.$$

$\Gamma$ satisfait l'hypothèse du corollaire 2.3. Pour le voir on utilise les deux remarques simples suivantes. D'abord, si $L$ est un lacet brownien de longueur $t$, pour tout $\delta < t/2$, la loi de $(L(s), L(t-s); 0 \leqslant s \leqslant \delta)$ est équivalente à la loi d'un couple de mouvements browniens indépendants. Ensuite, le temps local d'intersection en 0 de $2n$ mouvements browniens plans indépendants issus du même point est presque sûrement strictement positif sur l'intervalle $[0; \delta]$ pour tout $\delta > 0$ (utiliser la loi du tout ou rien). En appliquant le corollaire 2.3 on trouve le résultat du lemme. ∎

THÉORÈME 4.2. *La trajectoire de $W$ possède presque sûrement des points de multiplicité $\mathfrak{c}$.*

*Preuve.* Soient $a_0(1)=\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$. En remarquant que $l_2([0;\frac{1}{2}[\times]\frac{1}{2};1])>0$, $P$ p.s., et en utilisant le lemme 4.1 on trouve un couple $(a_1(1), a_1(2))$ vérifiant les deux propriétés

(i) $a_1(1), a_1(2))\in\Delta_{\varepsilon_0}(a_0(1))\cap\operatorname{supp}(l_2)$

(ii) pour tout $\varepsilon>0$, $l_4(\Delta_\varepsilon(a_1(1), a_1(2)))>0$.

Supposons maintenant que, pour un $n\geqslant 1$, on a construit deux familles $(a_p(k);\ 1\leqslant k\leqslant 2^p,\ 1\leqslant p\leqslant n)$ et $(\varepsilon_p;0\leqslant p\leqslant n-1)$ avec les deux propriétés: pour tout $p=1,\dots,n$,

(i) $a_p(k);\ 1\leqslant k\leqslant 2^p)\in\Delta_{\varepsilon_{p-1}}(a_{p-1}(k);\ 1\leqslant k\leqslant 2^{p-1})\ \cap\operatorname{supp}(l_{2^p})$

(ii) pour tout $\varepsilon>0$, $l_{2^{p+1}}(\Delta_\varepsilon(a_p(k);\ 1\leqslant k\leqslant 2^p))>0$.

On choisit alors $\varepsilon_n>0$ tel que $\varepsilon_n<\frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}$ et:

$$\varepsilon_n<\tfrac{1}{8}\inf(a_n(k)-a_n(k-1);\ 2\leqslant k\leqslant 2^n).$$

Ensuite la propriété (ii) permet de trouver une famille $(a_{n+1}(k);\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n+1})$ telle que

$$(a_{n+1}(k);\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n+1})\in\Delta_{\varepsilon_n}(a_n(k);\ 1\leqslant k\leqslant 2^n)\cap\operatorname{supp}(l_{2^{n+1}})$$

et grâce au lemme 4.1 on peut même s'arranger pour que, pour tout $\varepsilon>0$,

$$l_{2^{n+2}}(\Delta_\varepsilon(a_{n+1}(k);\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n+1}))>0,$$

ce qui permet de continuer la construction.

Pour conclure on pose

$$K=\bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\overline{\bigcup_{p=n}^{\infty}\{a_p(k);\ 1\leqslant k\leqslant 2^p\}}\right)$$

(si $F$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $\bar F$ désigne l'adhérence de $F$). En notant que, pour tout $n$ fixé, $W$ prend la même valeur $z_n$ en tous les points $a_n(k)$ $(1\leqslant k\leqslant 2^n)$, on voit que $W$ prend en tout point de $K$ la même valeur $z=\lim z_n$. D'autre part notre construction, et en particulier le choix des $\varepsilon_n$ assurent que $K$ est un ensemble de Cantor (i.e., $K$ est compact, totalement discontinu, sans point isolé), donc a la puissance du continu. ∎

## 5. La structure de l'ensemble des temps auxquels est atteint un point de multiplicité infinie

Dans la partie précédente nous avons vu que $P$ p.s. il existe un point $z$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $W^{-1}(z)$ contienne un ensemble de Cantor. Deux questions se posent alors. Tout d'abord, peut-on s'arranger pour que $W^{-1}(z)$ soit exactement un ensemble de Cantor? Plus généralement, étant donnée une partie compacte totalement discontinue $K$ de $]0; \infty[$, existe-t-il un point $z$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $W^{-1}(z)$ ait la même structure que $K$? Avoir la même structure signifie ici qu'il existe un homémorphisme croissant $\tau$ de $]0, \infty[$ dans $]0; \infty[$ tel que $\tau(W^{-1}(z)) = K$. La réponse à ces deux questions est oui.

THÉORÈME 5.1. *Soit $K$ une partie compacte totalement discontinue de $]0; \infty[$. Alors, $P$ p.s., il existe un point $z$ de $\mathbb{R}^2$ et un homéomorphisme croissant $\tau$ de $]0; \infty[$ dans $]0; \infty[$ tels que $\tau(W^{-1}(z)) = K$.*

*Preuve. 1ère étape.* Commençons par quelques notations. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose:

$$\Omega_n = \{0; 1\}^n,$$

avec la convention $\Omega_0 = \{\varnothing\}$. Soit

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n.$$

Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties $A$ de $\Omega$ vérifiant les trois propriétés suivantes:

(i) $\varnothing \in A$,

(ii) si $x = (x_1,..., x_n) \in A$, alors

$$(x, 0) = (x_1,..., x_n, 0) \in A$$

(iii) si $x = (x_1,..., x_n) \in A$, pour un $n \geqslant 1$, alors

$$(x_1,..., x_{n-1}) \in A.$$

Soit $I = \{0; 1\}^{\mathbb{N}^*}$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$). Pour $u = (u_1,..., u_n,...) \in I$ et pour tout $n \geqslant 0$ on note:

$$[u]_n = (u_1,..., u_n) \in \Omega_n.$$

On définit de même $[x]_n$ pour $x \in \Omega_m$, $m > n$. L'ensemble $I$ est muni de la topologie produit et de l'ordre lexicographique. Pour toute partie $A \in \mathcal{A}$ on pose:

$$I_A = \{u \in I; \text{pour tout } n \geqslant 0, [u]_n \in A\}.$$

Notons que $I_A$ est une partie compacte non vide de $I$.

LEMME 5.2. *Soit $K$ une partie compacte totalement discontinue non vide de $]0; \infty[$ On peut trouver une partie $A \in \mathcal{A}$ telle qu'il existe un homéomorphisme croissant de $K$ sur $I_A$.*

La preuve du lemme est un exercice élémentaire de topologie générale. Grâce au emme on est ramené à montrer que pour toute partie $A \in \mathcal{A}$ il existe $P$ p.s. un point $z$ de $\mathbb{R}^2$ et un homéomorphisme croissant de $I_A$ sur $W^{-1}(z)$. Le but de la prochaine étape est de construire $z$ et cet homéomorphisme.

*2ème étape.* On se fixe $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $n \geqslant 0$ on pose $A_n = A \cap \Omega_n$ et $m_n = \mathrm{Card}(A_n)$. Nous nous proposons de construire une famille $(a_x, x \in A) \subset ]0; \infty[$ telle que, pour tout $n \geqslant 0$, $W$ prenne la même valeur $z_n$ en chaque point $a_x$, $x \in A_n$. Les idées sont les mêmes que dans la preuve du théorème 4.2, qui correspond au cas $A_n = \Omega_n$ pour tout $n$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute famille $(b_x, x \in A_n)$ de nombres positifs on note $\Delta_\varepsilon(b_x, x \in A_n)$ l'ensemble des familles $(c_x, x \in A_{n+1})$ de nombres positifs telles que, pour tout $x \in A_{n+1}$:

(i) soit $x = (x', 0)$ et alors $b_{x'} - \varepsilon < c_x < b_{x'}$

(ii) soit $x = (x', 1)$ et alors $b_{x'} < c_x < b_{x'} + \varepsilon$.

Par récurrence on peut construire simultanément une famille $(a_x, x \in A)$ d'éléments de $]0; 1[$, deux suites $(\varepsilon_n, n \geqslant 0)$ et $(\eta_n, n \geqslant 0)$ de nombres strictement positifs convergeant vers 0 et une suite $(z_n, n \geqslant 0)$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$, de façon que les propriétés suivantes soient vérifiées, pour tout $n \geqslant 1$,

(a) $a_x, x \in A_n) = W^{-1}(z_n) \cap [0; 1]$,

(b) $a_x, x \in A_n) \in \Delta_{\varepsilon_n}(a_x, x \in A_{n-1})$,

(c) $\varepsilon_n < \frac{1}{8} \inf(|a_x - a_y|, x, y \in A_{n-1}, x \neq y)$,

(d) $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}$,

(e) si $u \in [0; 1]$ est tel que $|u - a_x| > 2^{-n}$ pour tout $x \in A_n$, alors $|W(u) - z_n| > 2\eta_n$

(f) pour tous $u, v \in [0; 1]$ tels que $|u - v| < 2\varepsilon_n$ on a $|W(u) - W(v)| \leqslant \eta_{n-1}$

(g) pour tout $\varepsilon > 0$,

$$l_{m_{n+1}}(\Delta_\varepsilon(a_x, x \in A_n)) > 0.$$

On initialise la construction en prenant $a_\varnothing = \frac{1}{2}$, $z_0 = W(\frac{1}{2})$ et $\varepsilon_0 = \eta_0 = 1$. Ensuite on commence par choisir $\varepsilon_1$ de façon que les propriétés (d) et (f) soient vérifiées. Traitant séparément les deux cas possibles $A_1 = \{0\}$ et $A_1 = \{0; 1\}$ on construit la famille $(a_x, x \in A_1)$ de façon que les propriétés (a), (b), (g) soient vérifiées pour $n = 1$ (avec $z_1 = W(a_0)$). L'argument pour

(g) est le même que dans la preuve du lemme 4.1. Enfin compte-tenu de (a) on peut choisir $\eta_1 > 0$ assez petit de façon que (e) soit vérifiée.

Soit maintenant $p \geqslant 2$. Supposons qu'on a construit pour tout $n \in \{0, ..., p-1\}$, $(a_x, x \in A_n)$, $z_n$, $\varepsilon_n$, $\eta_n$ de façon que les propriétés (a)–(g) soient satisfaites jusqu'à l'ordre $p-1$. On choisit d'abord $\varepsilon_p$ en tenant compte de (c), (d), et (f) à l'ordre $p$. Ensuite, en utilisant la propriété (g) écrite à l'ordre $p-1$, on peut trouver une famille $(a_x, x \in A_p) \in \Delta_{\varepsilon_p}(a_x, x \in A_{p-1})$ de façon que les propriétés (a) et (g) soient vérifiées à l'ordre $p$. Pour (a) on utilise la remarque de la fin de la partie 2. Pour (g) l'argument est à nouveau celui du lemme 4.1. Enfin grâce à (a) on peut choisir $\eta_p > 0$ de façon que la propriété (e) soit satisfaite. Ceci achève notre construction.

Les propriétés (b) et (c) montrent que pour tout $n$ l'application qui à $x \in A_n$ associe $a_x$ est croissante (ce fait était utilisé implicitement dans notre construction). De plus, en utilisant (b) et (d), on voit que, si $m \leqslant n$ et $x \in A_m$, $y \in A_n$ sont tels que $[y]_m = x$, on a: $|a_x - a_y| \leqslant 2\varepsilon_{n+1}$, d'où, d'après (f): $|W(a_x) - W(a_y)| \leqslant \eta_n$. Posons maintenant

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left( \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{a_x, x \in A_k\}} \right).$$

Les remarques précédentes montrent qu'on peut définir une application $\phi: I_A \to S$ en posant, pour $u \in I_A$,

$$\phi(u) = \lim_{n \to \infty} a_{[u]_n}.$$

La propriété (a) entraîne que $W$ prend en tout point de $S$ la même valeur $z = \lim z_n$.

*3ème étape.* Il reste à montrer que $S = W^{-1}(z)$ et que $\phi$ définit un homéomorphisme croissant de $I_A$ sur $S$. Commençons par établir $S = W^{-1}(z)$. La propriété de Markov montre qu'il suffit d'établir $S = W^{-1}(z) \cap [0; 1]$. Soit $a \in [0; 1] - S$. On peut choisir $n$ assez grand de façon que pour tout $x \in A_n$, $|a - a_x| > 2^{-n}$. La propriété (e) entraîne alors $|W(a) - z_n| > 2\eta_n$. Or les propriétés (b), (d), et (f) entraînent aisément $|z_n - z| \leqslant \eta_n$, d'où $W(a) \neq z$.

Montrons maintenant que $\phi$ est un homéomorphisme croissant. La croissance de $\phi$ découle de celle de l'application qui à $x \in A_n$ associe $a_x$. Les propriétés (b), (c), et (d) entraînent aisément que $\phi$ est continue et injective. Montrons que $\phi$ est surjective. Soit $a \in S$. Par définition on peut trouver une suite $(x(n))$, avec $x(n) \in A_{k_n}$ et $k_n \to \infty$, telle que:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_{x(n)}.$$

On remarque qu'on a alors $a_{x(n)} - a_{x(m)} \to_{n,m\to\infty} 0$, ce qui entraîne que pour tout entier $p$ il existe un (unique) élément $x_p \in A_p$ tel que pour tout $n$ assez grand $[x(n)]_p = x_p$. Si $u \in I_A$ est défini par $[u]_p = x_p$ pour tout $p$ on a $\phi(u) = a$. ∎

*Remarques.* (i) Le théorème 5.1 entraîne que $P$ p.s. la trajectoire de $W$ possède des points de multiplicité exactement dénombrable.

(ii) Si $B$ désigne un mouvement brownien en dimension un, on vérifie aisément que $P$ p.s., pour tout nombre réel $a$, $B^{-1}(a) \cap [0, 1]$ est soit vide, soit réduit à un point, soit un ensemble de Cantor, soit enfin la réunion d'un ensemble de Cantor et d'un point isolé. Le théorème 5.1 montre qu'en dimension deux la structure de l'image réciproque d'un point peut être beaucoup plus complexe.

## Remerciements

Je remercie O. Adelman et M. Yor pour de fructueuses discussions. Je tiens aussi à remercier S. J. Taylor pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

## References

1. O. Adelman, Plane Brownian motion, multiple points and order types, to appear.
2. O. Adelman and A. Dvoretzky, Plane Brownian motion has strictly $n$-multiple points, *Israel J. Math.* **52** (1985), 361–364.
3. A. Dvoretzky, P. Erdös, and S. Kakutani, Multiple points of paths of Brownian motion in the plane, *Bull. Res. Council Israel F* **3** (1954), 364–371.
4. A. Dvoretzky, P. Erdös, and S. Kakutani, Points of multiplicity $c$ of plane Brownian paths, *Bull. Res. Council Israel F* **7** (1958), 175–180.
5. D. Geman, J. Horowitz, and J. Rosen, A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Probab.* **12** (1984), 86–107.
6. N. Ikeda and S. Watanabe, "Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes," North Holland Math. Library, Kodansha, 1981.
7. J. F. Le Gall, Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien, preprint, 1984; *Ann. Probab.*, in press.
8. J. F. Le Gall, Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan, "Séminaire de Probabilités XIX," Lecture Notes in Math., No. 1123, pp. 314–331, Springer, Berlin, 1985.
9. J. Rosen, A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space, *Comm. Math. Phys.* **88** (1983), 327–338.
10. S. J. Taylor, Multiple points for the sample paths of the symmetric stable process. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **5** (1967), 247–264.
11. S. R. S. Varadhan, Appendix to K. Symanzik's paper, *in* "Local Quantum Theory" (R. Jost, Ed.), Academic, New York, 1969.
12. M. Yor, Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. "Séminaire de Probabilités XIX," Lecture Notes in Math., No. 1123, pp. 350–365, Springer, Berlin, 1985.